PRATIQUES LANGAGIÈRES ET PREUVES

Christophe Hache, Zoé Mesnil

Pratiques langagières et preuves

Christophe HACHE[1], Zoé MESNIL[2]

Dans cet atelier, nous nous penchons sur les pratiques langagières des mathématiciens concernant les preuves. Nous travaillons à partir de preuves de mathématiciens de la propriété « un entier et son carré ont même parité ». Nous présenterons le référent utilisé (empruntant certains éléments de la logique des prédicats, de la déduction naturelle) et nos premières analyses.

L'atelier a débuté par un petit travail de mise en jambe permettant de faire connaissance avec la preuve qui est au centre des analyses présentées. Nous proposons au lecteur de faire le même travail avant de commencer sa lecture : rédiger une preuve de la proposition

« Un entier et son carré ont toujours même parité »

(preuve à rédiger, si possible, à destination d'un public de première année d'université ou de fin de terminale scientifique).

Introduction

Le thème « Logique et raisonnement » du colloque de la Corfem couvre deux années. L'an passé ont eu lieu une conférence (Zoé Mesnil) et un atelier (Christophe Hache) (voir Gandit à paraître) qui sont en lien direct avec l'atelier de cette année, même si suivre l'atelier 2015 ne nécessitait pas d'avoir été là l'an passé. Nous les résumons dans ce préambule.

Dans la première partie de la conférence « Logique et langage dans la classe de mathématiques et la formation », Zoé Mesnil a montré à travers deux exemples (celui de la quantification universelle implicite associée aux implications et celui des différents « et » que l'on peut trouver en mathématiques) comment la logique mathématique pouvait nous aider à décrire, à comprendre, ce que nous disons quand nous disons des mathématiques. Une analyse du discours des manuels de lycée sur les connecteurs ET et OU, ou sur la négation et le contre-exemple a permis d'argumenter la nécessité d'une formation en logique mathématique pour les enseignants de mathématiques. Finalement, un contenu possible pour une telle formation a été décrit, dans lequel les notions de variable et de proposition[3] sont primordiales, leur étude étant un préalable nécessaire à l'étude d'autres notions de logique.

L'atelier « Logique, langage. Énoncés et preuves en mathématiques » animé par Christophe Hache proposait une revue de trois travaux. Le premier est une recherche (voir Hache 2015)

1 LDAR Université Paris Diderot et IREM de Paris

2 LDAR Université Paris Est Créteil et IREM de Paris

3 Les *propositions* sont des affirmations de faits concernant des objets mathématiques. Une proposition est susceptible d'être vraie ou fausse, par exemple « 3 est impair », « 2 est impair » et « *n* est impair » sont des propositions.

qui analyse l'usage du mot « avec » dans certaines formulations mathématiques. Le second est la thèse de Farasololalao Rakotovoavy (Rakotovoavy 1983) qui concerne l'usage, dans les pratiques langagières des mathématiciens de certains adjectifs marqueurs de variances (adjectifs inclus dans des syntagmes nominaux désignant des variables : « arbitraire », « choisi », « donné », « fixe », « fixé », « quelconque », « variable »). Et enfin le troisième est la thèse de Yves Gerbier et Hélène Icart Seguy (Gerbier et Icart Seguy 1987) qui travaillent sur l'usage des marqueurs logico – discursifs « car », « comme », « parce que » et « puisque » dans les textes mathématiques avec une entrée logique mathématique et une entrée linguistique. Cet atelier soulignait l'intérêt d'utiliser des notions de logique mathématique comme référent pour analyser les pratiques langagières (des mathématiciens, y compris dans les manuels du secondaire ou du supérieur). Les pratiques langagières liées à la formulation des définitions et des propositions sont analysées en utilisant le calcul des prédicats. L'analyse des formulations de preuves utilisant la déduction naturelle ébauchée dans l'atelier de 2014 a depuis été approfondie et est présentée dans l'atelier de cette année.

Nous commencerons par présenter pourquoi et comment nous pencher dans des recherches en didactique des mathématiques sur les façons dont sont formulées les mathématiques. Nous présenterons plus particulièrement ici des outils d'analyse de formulations de preuves[4]. Nous montrerons d'abord un premier référent élaboré à partir d'une rigidification de l'usage de la langue naturelle en expliquant les raisons pour lesquelles nous ne l'avons pas retenu. Nous présenterons ensuite l'outil que nous avons choisi et adapté, la déduction naturelle de Gentzen[5].

Positionnement, questions, corpus

Le langage est la faculté que les hommes et les femmes ont à s'exprimer et à communiquer entre eux à l'aide d'une langue (lexique, grammaire etc.). C'est à la fois une activité individuelle (physique au moins) et une pratique sociale. Pour un sujet donné, le langage n'est pas un média d'une pensée déjà constituée, ce n'est pas seulement une activité physique, on ne peut distinguer agir, parler et penser. C'est un outil de construction, de négociation et de transformation des représentations individuelles (celles du sujet considéré, celles des personnes avec qui il interagit) et collectives. D'un point de vue social, de façon générale, chaque groupe social (notamment mathématiciens) développe des pratiques qui lui sont propres, y compris des pratiques langagières.

Les pratiques langagières des mathématiciens mélangent formalisme et langue naturelle et, à l'écrit, formalisme, langue naturelle et symboles de divers ordres.

D'une part on ne peut pas exprimer sans ambiguïté les mathématiques avec la langue naturelle. On a besoin d'outils formels pour exprimer les mathématiques, Frege se propose ainsi de créer un formalisme de référence avec son Idéographie et de supprimer tout usage de la langue naturelle (voir par exemple Frege 1882 / 1994). Arriver à un usage formel de la langue est aussi, en quelque sorte, un des objectifs que se fixe Hilbert. D'autre part on ne peut pas communiquer ou penser complètement formellement (les mathématiciens ne sont pas des

4 Le mot *preuve* est utilisé dans ce texte à au moins deux niveau : d'une part pour désigner des textes écrits (nous dirons par exemple « la preuve la plus courte recueillie »), et d'autre part pour désigner une structure déductive commune à plusieurs de ces textes (nous dirons par exemple « analyse de formulations de preuves » plutôt qu'« analyse de preuve » pour souligner le fait que nous nous intéressons à différentes mises en mots d'une même preuve).

5 Nous signalons les travaux de Viviane Durand Guerrier et Thomas Barrier sur la modélisation logique des situations de validation et de preuve. Ils utilisent pour leur part deux modélisations : la déduction naturelle de Copi et la logique dialogique. Voir Barrier et Durand-Guerrier 2013.

ordinateurs). Les pratiques langagières des mathématiciens s'appuient sur un mélange variable d'expressions formalisées et de langue naturelle. Reconstituer et reconnaître les éléments de ce mélange est malaisé car les frontières sont floues, non explicites, non stables (elles dépendent du locuteur, mais aussi de l'auditoire, du contexte, etc.), ce d'autant plus que l'expression formalisée peut se faire en langue naturelle (notamment à l'oral), il y a co-existence. Cette co-existence est une dialectique fructueuse (à maintenir, à entretenir) entre pensée, échanges, intuition, conjecture, exploration d'une part, et rigueur et formalisme d'autre part.

Nous abordons ici les pratiques langagières liées à la rédaction de preuves. L'objet de l'atelier est de présenter et discuter un outil méthodologique. À la suite des travaux présentés en 2014 (voir introduction) nous expliquons comment la déduction naturelle nous sert de référent pour décrire des formulations de preuves. La perspective est bien sûr celle de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, nous faisons l'hypothèses que ces outils et ces analyses permettront d'enrichir la réflexion sur l'apprentissage de la démonstration[6].

Pour affiner l'adaptation et l'utilisation de la déduction naturelle à notre travail d'analyse de formulations de preuves, nous avons choisi de commencer par travailler sur un corpus de preuves rédigées par des mathématiciens d'un théorème simple (celui évoqué en début d'atelier) : un entier et son carré ont toujours même parité. Nous avons recueilli une petite trentaine de textes.

Vers un référent formel

Les arguments mathématiques utilisés donnent un premier critère pour distinguer les preuves que nous avons recueillies. Un premier ensemble de production utilise l'équivalence entre « a et b ont même parité » et « $a - b$ est pair ». L'idée est alors de regarder la différence $n^2 - n$ et de l'écrire sous sa forme factorisée $n\,(n - 1)$, ce qui permet de dire qu'elle est paire en tant que produit de deux entiers dont l'un est pair puisqu'ils sont consécutifs. La preuve la plus courte que nous ayons recueillie utilise cette idée :

> L'un des deux entiers n ou $n-1$ est pair, donc l'entier $n^2 - n = n(n-1)$ est pair.

Même si l'on peut considérer qu'elle contient les principaux arguments permettant de conclure, la concision de cette preuve a un certain prix : plusieurs pas de raisonnement restent implicites.

Regardons maintenant cet autre texte de preuve :

> Dans la suite des nombres entiers, les nombres sont alternativement pairs et impairs.
>
> Dire que les nombres entiers a et b ont même parité signifie que leur différence est paire. Avec $a = b^2$, la différence s'écrit $b(b-1)$ produit de deux entiers consécutifs, l'un des deux est donc pair, et donc ce produit est pair.

Nous voyons immédiatement que cette deuxième rédaction, qui se base globalement sur les mêmes arguments mathématiques, contient moins d'implicites que la première. Nous pouvons constater qu'elle commence par l'énonciation de deux théorèmes[7], qui sont utilisés ensuite dans la preuve mais sans que cette utilisation soit mentionnée là où elle intervient.

---

6 Le mot *démonstration* est à entendre ici dans ses deux aspects *processus* et *produit* qui nous paraissent essentiels en ce qui concerne l'apprentissage. C'est aussi en lien avec cette polysémie que nous lui préférons le mot « preuve » dans le reste du texte (voir aussi note 4).

Ces deux preuves suffisent à montrer à quel point rédiger une preuve relève de choix de mises en forme et de formulations propres à celui qui la rédige, choix qu'il fait en prenant en considération les personnes à qui il destine cette preuve, et dans lesquels interviennent des habitudes d'expression, ses opinions sur ce qui est convaincant dans une preuve[8], ses préférences pour telle ou telle formulation.

Pour pouvoir analyser et comparer plus finement les différentes formulations de preuves basées sur les mêmes arguments, notre idée est de les mettre chacune en regard d'un référent formel. Dans un premier temps, nous allons nous contenter d'essayer de contraindre la mise en forme des preuves en langue naturelle, sans utiliser de symbolisation particulière.

Pour essayer de donner un côté dynamique à cette construction (ce qui était fait dans l'atelier grâce à la succession des diapositives, et à un jeu de couleurs), nous la présentons dans un tableau contenant, dans la colonne de droite, la succession des textes obtenus suite à des modifications expliquées dans la colonne de gauche. Les parties en gras correspondent à des changements d'une ligne du tableau à l'autre.

La première règle de mise en forme que nous nous donnons est d'obtenir une preuve consistant en une succession de propositions, pouvant chacune être comprise de façon autonome, reliées par des marqueurs d'inférence. Les deux premières phrases étant des propositions, intéressons nous pour l'instant à la troisième.	Avec $a = b^2$, la différence s'écrit $b\ (b - 1)$ produit de deux entiers consécutifs, l'un des deux est donc pair, et donc ce produit est pair
Dans le début de la phrase, « Avec $a = b^2$ », l'utilisation de la variable a ne sert qu'à indiquer le lien avec la phrase précédente, c'est-à-dire à indiquer que la caractérisation de « avoir même parité » va être appliquée à un entier b et à son carré. « La différence » renvoie donc à celle entre ces deux entiers. Nous pouvons remplacer ce début de phrase par « $b^2 - b$ s'écrit $b(b-1)$ produit de deux entiers consécutifs », mais dans cette formulation il y a un enchaînement qui masque une conjonction. Nous mettons alors au jour cette conjonction et écrivons plus simplement « $b^2 - b = b(b-1)$ » plutôt que « $b^2 - b$ s'écrit $b(b-1)$ »	**$b^2 - b = b\ (b - 1)$ et $b\ (b - 1)$ est le produit de deux entiers consécutifs**, l'un des deux est donc pair, et donc ce produit est pair
Continuons : « l'un des deux est donc pair » : la présence du marqueur d'inférence donc fait que cette partie de phrase n'est pas une proposition (Mesnil, 2014 à paraître). La première modification est alors de sortir ce marqueur d'inférence, qui sera utilisé comme lien entre des propositions. Il reste : « l'un des deux est pair », qui ne peut pas être compris de façon autonome car il y a un phénomène d'anaphore[9] qui renvoie à un élément qui se situe hors de cette partie. Nous supprimons ce phénomène en remplaçant *l'un des deux* par le nom des éléments auxquels cette expression renvoie. Nous avons ce même phénomène avec « ce produit » dans la dernière partie de la phrase, à laquelle nous appliquons le même traitement.	$b^2 - b = b(b - 1)$ et $b(b - 1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, **donc b est pair ou $b - 1$ est pair**, et donc **$b(b - 1)$ est pair**

7 La deuxième phrase peut être vue comme l'énonciation d'un théorème ou d'une définition, mais cette distinction n'est pas très importante pour la suite de notre propos.

8 Voir les notions de *principe principal* et de *conséquence principale* introduites par Y. Gerbier (cité dans Hache à paraître).

La troisième phrase se présente maintenant comme une succession de quatre propositions. Nous allons expliciter l'enchaînement logique de ces propositions, c'est-à-dire ce qui permet de les affirmer successivement. Pour cela, reprenons les deux premières phrases de la preuve originale, et tout d'abord « dans la suite des nombres entiers, les nombres sont alternativement pairs et impairs ». Cette proposition sert à justifier le passage de la deuxième proposition à la troisième, et nous voyons alors que dans la proposition « $b(b-1)$ est le produit de deux entiers consécutifs », la question du produit n'est pas importante. Nous allons donc : - modifier la deuxième proposition, qui devient seulement b et $b-1$ sont des entiers consécutifs, - insérer le théorème qui va être utilisé, en fait la première phrase (ou plutôt une formulation équivalente mettant mieux en évidence le prédicat « être des entiers consécutifs ») introduite par *or*, pour marquer son rôle dans l'enchaînement, - conclure avec la troisième proposition, introduite par *donc*.	$b^2-b=b(b-1)$ et **b et $b-1$ sont deux entiers consécutifs,** **or lorsque deux entiers sont consécutifs, l'un des deux est pair,** **donc b est pair ou $b-1$ est pair**, et donc $b(b-1)$ est pair
Le théorème qui permet de déduire « $b(b-1)$ est pair » à partir de « b est pair ou $b-1$ est pair » n'est pas mentionné, rétablissons le. C'est ensuite de la parité du produit $b(b-1)$ que l'on va pouvoir déduire la parité de la différence b^2-b, puis, en utilisant le théorème « dire que les nombres entiers a et b ont même parité signifie que leur différence est paire », deuxième phrase de la preuve originale, nous pouvons déduire que b^2 et b ont même parité. Il nous reste bien sûr à introduire la variable b qui nous sert dans toute cette preuve. Cette introduction, parce qu'elle nomme un objet qui n'a aucune propriété particulière, hormis d'appartenir à un domaine précisé, nous permet de dire que ce qui est conclu pour b l'est pour n'importe quel objet du même domaine, et donc de déduire une proposition universelle. Cette introduction n'est pas une proposition, nous utilisons l'expression « soit », associée à la conclusion « nous avons ainsi montré que » suivie d'une proposition universelle dans laquelle nous n'utilisons pas la même variable pour distinguer la variable introduite pour la preuve de la variable muette qui sert dans la formulation de la conclusion. Nous terminons la preuve en reproduisant l'énoncé original, dans lequel n'apparait pas de variable.	**Soit b un entier relatif,** b et $b-1$ sont deux entiers consécutifs, or de deux entiers consécutifs l'un des deux est pair, donc b est pair ou $b-1$ est pair, **or le produit de deux entiers dont l'un est pair est pair,** donc $b(b-1)$ est pair, **or $b^2-b=b(b-1)$**, **donc b^2-b est pair,** **or dire que deux nombres entiers ont même parité signifie que leur différence est paire,** **donc b^2 et b ont même parité** **Nous avons ainsi montré que $\forall x \in \mathbb{Z}$, x^2 et x ont même parité,** **c'est-à-dire qu'un entier et son carré ont toujours même parité.**

Nous obtenons finalement une preuve, organisée en quatre pas ternaires (à chaque fois « P1, or P2, donc P3 », certaines propositions intervenant comme conclusion d'un pas et comme hypothèse du pas suivant, d'autres propositions servant à justifier l'inférence), une introduction de variable associée à une proposition universelle (« soit b un entier relatif »… « nous avons ainsi montré que… »), reformulée en une conclusion reprenant la proposition à démontrer. La formulation ainsi obtenue est formelle dans le sens où elle respecte certaines contraintes d'organisation et où les mots choisis pour relier les propositions, ou signaler

9 Procédé consistant à rappeler un mot ou groupe de mots précédemment énoncé par un pronom, un adverbe, un adjectif, etc..

l'introduction de variable, sont figés. Le processus décrit pour obtenir cette formulation à partir de la formulation initiale met en évidence que l'auteur d'une preuve choisit les arguments qu'il met en avant (et donc les parties que le lecteur doit combler), et l'organisation de ces arguments (souvent loin de l'organisation linéaire finalement obtenue). Il fait par ailleurs des choix d'ordre littéraire (choix personnels, ou liés à des pratiques de la communauté).

Nous avons ainsi montré comment nous pourrions penser à un référent formel qui utilise la langue naturelle, mais dans une mise en forme tellement contrainte, que ce qu'on obtient n'a plus grand chose à voir avec le langage courant, ni même avec les pratiques langagières courantes des mathématiciens. Nous voulons insister sur le fait que nous ne défendons absolument pas qu'une telle formalisation du langage et de la structure des preuves est un modèle pour la formulation des preuves (que ce soit pour les mathématiciens, pour les enseignants... ou pour les élèves). Au contraire, nous voulons montrer en utilisant un tel référent formel à quel point les preuves telles que nous les rédigeons sont éloignées de celui-ci, pour pouvoir défendre l'idée que l'apprentissage de la démonstration ne se réduit pas à apprendre quelles sont les inférences valides, mais s'accompagne de l'apprentissage de toutes ces pratiques qui interviennent dans la rédaction, y compris les pratiques langagières. Et pour marquer plus clairement cette position, nous choisissons pour nos analyses un référent formel qui n'utilise pas la langue naturelle.

Par ailleurs, dans la preuve obtenue, toutes les inférences sont marquées par le même mot « donc », et même si nous avons pris soin d'expliciter les propositions qui interviennent dans chacune d'elles, nous n'avons par contre rien dit des règles logiques qui les justifient. Or, nous voulons pouvoir décrire plus précisément les inférences en les reliant à la structure logique des propositions qui y interviennent, et notamment en distinguant les connecteurs et les quantificateurs dont elles sont constituées. Nous reprenons ainsi la démarche que nous avions adoptée en utilisant le langage des prédicats pour analyser les formulations des propositions, en référant certains usages à des éléments spécifiques (par exemple, les formulations en *si... alors...* qui expriment une implication universellement quantifiée).

Ces objectifs nous ont amenés à choisir comme référent formel la déduction naturelle de Gentzen, telle qu'elle est présentée dans *Recherches sur la déduction logique* (Gentzen, 1934 / 1955).

Regardons par exemple comment rendre compte, dans ce formalisme, de la première inférence : « b et $b-1$ sont deux entiers consécutifs, or de deux entiers consécutifs l'un des deux est pair, donc b est pair ou $b-1$ est pair ». Nous avons une hypothèse et une conclusion qui sont des propositions concernant b. La proposition intermédiaire est une proposition universellement quantifiée, qui peut être reformulée de la façon suivante :

$$\forall m\ \forall n\quad [\ m \text{ et } n \text{ sont consécutifs} \Rightarrow (m \text{ est pair OU } n \text{ est pair})\ ]$$

Dans cette proposition, les variables m et n sont muettes, la proposition ne parle pas de m ni de n. Pour pouvoir l'utiliser pour dire quelque chose sur b et $b-1$, il faut d'abord l'instancier, c'est-à-dire l'appliquer à b et $b-1$ ce qui est affirmé de tout m et tout n, c'est-à-dire qu'il faut déduire « b et $b-1$ sont consécutifs $\Rightarrow$ (b est pair OU $b-1$ est pair) » de « $\forall m\ \forall n$ (m et n sont consécutifs $\Rightarrow$ (m est pair OU n est pair)) ».

On dit alors qu'on élimine la quantification universelle. Nous reprenons la disposition verticale et la barre horizontale utilisées par Gentzen pour noter cette règle de déduction. Nous rajoutons aux notations de Gentzen les symboles « ∀/ » en face de la barre horizontale, pour rappeler qu'il s'agit d'une élimination du quantificateur universel : la succession des pas de déduction va faire apparaître plusieurs traits horizontaux, ce symbolisme permet de rappeler la nature de chacun. Nous utilisons les symboles « $[t/x]$ » pour rappeler la substitution[10] du terme[11] t à la variable x : cet ajout permet d'avoir une trace dans le référent du fait qu'il est parfois nécessaire (ou au moins confortable) dans la formulation du pas de déduction, de rappeler la substitution qui est faite. Ces symboles sont grisés, car ils ne servent qu'à mieux comprendre la mise en œuvre de la règle.

Règle d'élimination du quantificateur universel : $$\frac{\forall x P(x)}{P(t) \quad [t/x]} \forall/$$

Après avoir éliminé les quantificateurs universels, nous obtenons une implication entre deux propositions, et nous faisons une des déductions les plus courantes en mathématiques, qui consiste à déduire la conclusion à partir de la prémisse et de l'implication : de « b et $b-1$ sont consécutifs » et « b et $b-1$ sont consécutifs $\Rightarrow$ (b est pair OU $b-1$ est pair) », je déduis « b est pair OU $b-1$ est pair ». Cela revient à éliminer l'implication :

Règle d'élimination de l'implication : $$\frac{P, \quad P \Rightarrow Q}{Q} \Rightarrow/$$

Nous voyons ainsi que ce premier « donc » correspond à l'application de deux règles de déduction : l'élimination d'un quantificateur universel et l'élimination d'une implication. Il est extrêmement fréquent que ces deux pas soient associés.

La deuxième inférence de la preuve formalisée, « b est pair ou $b-1$ est pair, or le produit de deux entiers dont l'un est pair est pair, donc $b(b-1)$ est pair » relève également de cette double élimination.

La troisième inférence, « $b\,(b-1)$ est pair, or $b^2 - b = b\,(b-1)$, donc $b^2 - b$ est pair » est par contre différente, il s'agit d'une règle associée à l'égalité, que nous ne détaillerons pas ici.

Revenons sur la quatrième inférence, « $b^2 - b$ est pair, or dire que deux nombres entiers ont même parité signifie que leur différence est paire, donc b^2 et b ont même parité ». Que la partie « dire que deux nombres entiers ont même parité signifie que leur différence est paire » soit interprétée comme un théorème qui affirme une équivalence, ou comme une définition, dans les deux cas on peut en particulier affirmer l'implication universellement quantifiée « $\forall m\ \forall n\ (m-n$ est pair $\Rightarrow m$ et n ont même parité) » qui permet encore une fois de ramener l'inférence à une double élimination de la quantification universelle et de l'implication.

Nous terminerons en revenant sur l'introduction de variable en lien avec la preuve d'une proposition universelle : « Soit b un entier relatif (...) b^2 et b ont même parité. Nous avons ainsi montré que $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2$ et x ont même parité ». Cette étape consiste à ré-introduire un quantificateur universel : une proposition $\forall x\ \mathrm{P}(x)$ est déduite d'une proposition $\mathrm{P}(b)$ portant sur une variable b qui est « fraîche » (ou « propre », mots que l'on pourra comprendre ici comme « n'ayant pas été déjà utilisée dans cette preuve »).

10 C'est-à-dire qu'on remplace toutes les occurrences libres de la variables x par le terme t.

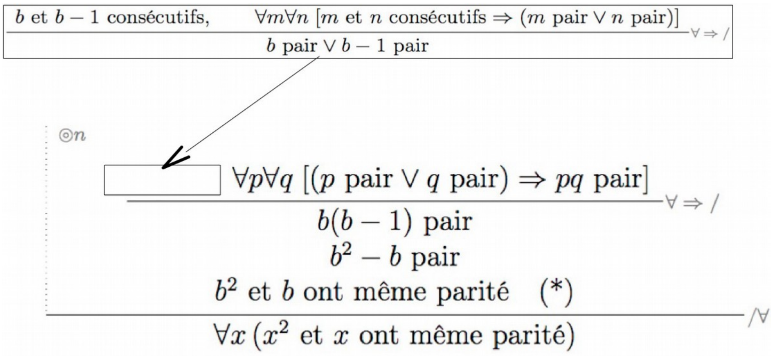
11 Un *terme* est une expression mathématique désignant un objet. Une *variable* (par exemple « x »), une constante (par exemple « 2 ») sont des termes, mais aussi « x^2 » ou « $2x + 2$ ».

Là encore nous utilisons des symboles grisés pour préciser la mise en œuvre de cette règle : ⊚*b* marque l'introduction d'une variable, les pointillés verticaux délimitent un moment de la preuve dans lequel la variable *b* est utilisée (on va y trouver des propositions dans lesquelles la variable *b* est libre), moment qui se termine par la proposition P(*b*) (et généralement, c'est sur cette conclusion P(*b*) que la plupart des preuves se terminent, la conclusion universellement quantifiée étant omise).

Règle d'introduction du quantificateur universel :

$$\dfrac{\begin{array}{l}\circledcirc b\\ \quad\vdots \\ \quad P(b)\end{array}}{\forall x\, P(x)}\ /\forall$$

Finalement nous obtenons le référent formel suivant :



Quelques remarques :

– Nous ne gardons pas trace dans le référent de certaines inférences décrites précédemment : aucune précision n'est donnée ici sur les justifications permettant d'enchainer les trois propositions qui figurent avant (*).

– Nous avons allégé les notations en utilisant une « règle d'élimination de ∀ ⇒ » :

Pour résumer :

$$\dfrac{P(a) \qquad \dfrac{\forall x\ (P(x)\Rightarrow Q(x))}{P(a)\Rightarrow Q(a)\ \ [a/x]}\,\forall/}{Q(a)}\,\Rightarrow/$$

On a noté :

$$\dfrac{P(a),\quad \forall x\ (P(x)\Rightarrow Q(x))}{Q(a)}\ \forall\Rightarrow/$$

On retrouve cette déduction correspondant à une double élimination dans les formulations du type : « *P*(*a*), or si *P*(*a*) alors *Q*(*a*), donc *Q*(*a*) ». L'implication « si *P*(*a*) alors *Q*(*a*) » est formulée sans quantification et avec la variable *a* : on peut l'interpréter comme une instanciation de la règle ∀*x* *P*(*x*) ⇒ *Q*(*x*) (élimination du quantificateur avec substitution de *a* à *x*), on aurait alors la formulation d'une implication non quantifiée ; on peut aussi l'interpréter comme une formulation de cette proposition ∀*x* *P*(*x*) ⇒ *Q*(*x*) laissant implicite la quantification (omission très fréquente) et utilisant la variable *a*[12] ? Mais sans doute peut-on penser qu'il y a quelque chose de ces deux interprétations et que l'ambiguïté permet de formuler l'implication, en la pensant à la fois universellement quantifiée, c'est-à-dire comme théorème mathématique, et à la fois pour une valeur particulière, c'est-à-dire comme une instanciation du théorème.

12 Ce qui est alors syntaxiquement maladroit car la variable *a* est une variable libre dans les propositions *P*(*a*) et *Q*(*a*) et muette dans l'implication.

Exemples d'analyses des pratiques langagières

La partie précédente avait pour but de présenter l'usage que l'on pourrait faire d'un référent formel pour l'analyse des formulations de preuves. Nous avons présenté, au passage, trois règles de la déduction naturelle : l'élimination de la quantification universelle (si on a prouvé $\forall x\, P(x)$ alors $P(t)$ est vraie, pour n'importe quel terme t), l'introduction de la quantification universelle (si on a prouvé $P(a)$ pour une variable « fraiche » alors on a prouvé $\forall x\, P(x)$) et l'élimination de l'implication (*modus ponens*).

Dans le cadre de la déduction naturelle, à chacun des connecteurs du calcul des propositions (conjonction, disjonction, implication, négation[13]) et à chacun des quantificateurs (existentiel et universel) sont associées une règle d'introduction et une règle d'élimination. Nous allons les présenter ici, ainsi que la façon dont elles nous permettent de mettre en lumière des éléments des pratiques langagières des mathématiciens (en tout cas des auteurs des preuves analysées). Nous nous appuyons ici sur l'analyse de deux nouvelles preuves.

Nous allons dans un premier temps nous intéresser à une preuve basée sur d'autres arguments mathématiques que celles évoquées dans la partie précédente :

> On va établir successivement les propriétés suivantes :
> (1) Si un nombre entier est pair, son carré l'est aussi.
> (2) Si un nombre entier est impair, son carré l'est aussi.
>
> Preuve de (1). Soit n un entier pair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p$. Il vient alors $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$. Ainsi n^2 est pair.
> Preuve de (2). Soit n un entier impair. Alors il existe un entier p tel que $n = 2p+1$. Il vient alors $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$. Ainsi n^2 est impair.

Nous interprétons cette preuve de la façon suivante : l'auteur veut prouver une équivalence comme conjonction de deux implications. Nous utiliserons donc dans le référent formel la règle d'introduction du ET (conjonction, noté aussi $\wedge$).

Règle d'introduction du connecteur ET : $$\frac{P\ ,\ Q}{P \wedge Q}\, /\wedge$$

La structure macroscopique de la preuve est très peu explicitée, si bien que, lors de l'atelier, une discussion s'engage pour savoir si cette preuve peut être considérée comme une disjonction des cas. Nous reviendrons sur cette distinction. Nous poursuivons ici selon notre interprétation, et nous allons rentrer dans le détail de la preuve de chaque implication.

« Preuve de (1) ». Il s'agit de prouver une implication quantifiée universellement (implicite associé à la formulation en « si … alors … »). La preuve commence naturellement par la présentation d'une variable fraiche dans le but de prouver une quantification universelle (« Soit n »).

L'auteur souhaite ensuite prouver n pair $\Rightarrow n^2$ pair. La preuve d'une implication $P \Rightarrow Q$ (introduction du connecteur $\Rightarrow$) se présente de la façon suivante : on suppose temporairement la proposition P, et, sous cette hypothèse, on prouve Q, on a alors prouvé $P \Rightarrow Q$ (sans que rien n'ait finalement été affirmé sur la véracité de P ou de Q).

13 Nous n'évoquerons pas ici les règles liées à la négation.

Dans le référent formel cette étape du raisonnement consiste à introduire une implication (les crochets ci-dessous matérialisent le fait que la déduction se fait sous hypothèse temporaire).

Règle d'introduction de l'implication :

$$\cfrac{\begin{bmatrix} P \\ \vdots \\ Q \end{bmatrix}}{P \Rightarrow Q}\ /\!\Rightarrow$$

Notons que l'auteur utilise ici une même expression (« Soit *n* un entier pair ») à la fois pour la présentation de la variable *n* (en vue de la preuve d'une quantification universelle) et pour l'introduction d'une hypothèse temporaire (en vue de la preuve d'une implication). Nous avons souligné plus haut que l'élimination d'une implication est très souvent associée à l'élimination d'un quantificateur universel, de la même façon ici l'introduction d'une implication est associée à l'introduction d'un quantificateur universel, la chose étant si fréquente que ces deux introductions sont usuellement annoncées dans une même expression (par exemple comme ici : « Soit *n* tel que $P(n)$ »). Nous utiliserons dans notre référent formel une règle d'introduction de l'implication universellement quantifiée :

Pour résumer :

$$\begin{array}{l} \circledcirc a \\ \cfrac{\cfrac{\begin{bmatrix} P(a) \\ \vdots \\ Q(a) \end{bmatrix}}{P(a) \Rightarrow Q(a)}\ /\!\Rightarrow}{\forall x\, P(x) \Rightarrow Q(x)}\ /\forall \end{array}$$

On notera :

$$\begin{array}{l} \circledcirc a \\ \cfrac{\begin{bmatrix} P(a) \\ \vdots \\ Q(a) \end{bmatrix}}{\forall x\, P(x) \Rightarrow Q(x)}\ /\forall \Rightarrow \end{array}$$

Dans sa preuve, l'auteur va ensuite utiliser le fait que *n* est pair. Cette propriété est existentielle ($\exists k \;\; n = 2k$). L'utilisation d'une propriété $\exists x \;\; P(x)$ dans une preuve est décrite par le schéma suivant : on introduit une nouvelle variable fraiche (*a* par exemple), on suppose temporairement $P(a)$ vrai, et on prouve une propriété *M* (ne contenant pas d'occurrence de a) à partir de $P(a)$, on a alors prouvé que l'on peut déduire *M* de $\exists x \;\; P(x)$. Dans le référent formel cette étape du raisonnement consiste à éliminer une quantification existentielle (les crochets et les pointillés ci-dessous sont utilisés dans le même sens que dans les règles où ils ont déjà été rencontrés).

Élimination de la quantification existentielle :

$$\cfrac{\exists x\, P(x) \qquad \begin{bmatrix} \odot a & P(a) \\ & \vdots \\ & M \end{bmatrix}}{M}\ \exists/$$

L'auteur écrit « alors il existe *p* tel que $n = 2p$ ». On pourrait comprendre qu'il exprime ainsi le fait qu'il traduit « *n* pair » par « $\exists p \;\; n = 2p$ ». La suite du texte montre que ce n'est pas seulement ça, car la variable *p* continue à être utilisée alors que dans la simple proposition « il existe *p* tel que $n = 2p$ » c'est une variable muette. En affirmant « il existe *p* tel que $n = 2p$ »

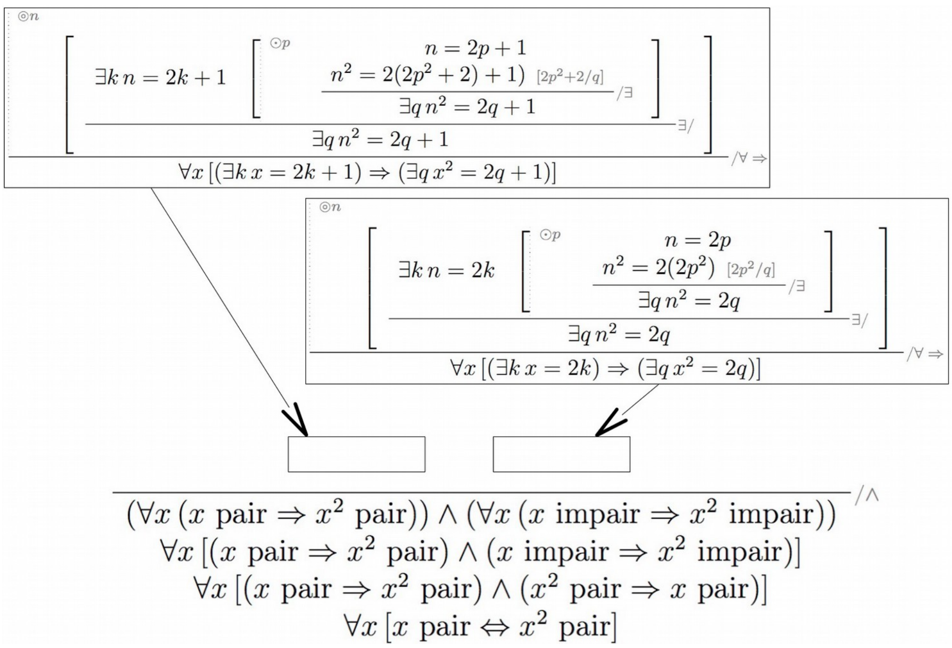
l'auteur affirme donc en même temps cette propriété existentielle, introduit une variable fraîche p et affirme qu'il suppose (temporairement) $n = 2p$. Cet usage amène bien sûr de la fluidité dans le discours, mais peut être source d'erreur : les mathématiciens aguerris savent qu'il faut « changer de variable » lors de deux éliminations de quantifications existentielles simultanées[14], malheureusement, de nombreux étudiants ne mettent pas en œuvre cette pratique, et produisent ainsi des raisonnements erronés (voir Chellougui, 2004).

L'auteur poursuit avec « Il vient alors $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$ », c'est-à-dire avec deux calculs algébriques enchainés. Le second a pour but d'écrire n^2 sous la forme $2t$ pour un certain terme t en vue de préparer la preuve d'une proposition quantifiée existentiellement. En effet, pour prouver une proposition quantifiée existentiellement, $\exists x\ P(x)$, il suffit de prouver que la proposition $P(t)$ est vraie pour un certain terme t (quelconque). Dans le référent formel cette étape du raisonnement correspond à une introduction du quantificateur universel (ci-dessous, les symboles « $[t/x]$ » servent à préciser la substitution qui est faite, explicitée ou non dans les rédactions habituelles).

Introduction du quantificateur existentiel : $$\frac{P(t)\ \ [t/x]}{\exists x\, P(x)}\ /\exists$$

Dans la preuve étudiée, c'est la mise sous la forme « $2 \times 2p^2$ » à la fin du calcul algébrique qui donne l'indice de la substitution qu'il faut faire pour déduire « $\exists k\ \ n^2 = 2k$ » de « $n^2 = 4p^2$ ». Dans le référent formel on écrira « $[2p^2/k]$ ». Soulignons que l'introduction de la quantification existentielle n'est pas explicite : l'auteur donne simplement la forme « n^2 est pair ».

Le référent formel de la preuve de la page 9 est finalement le suivant :



Dernières remarques sur la formulation de la preuve analysée :

- Les marqueurs d'inférences utilisés sont « ainsi », « il vient alors » et « alors ». La proximité entre ce dernier mot et la notion d'implication, ne simplifie pas la distinction entre implications et inférences.

- L'inférence marquée par « ainsi » est justifiée par la forme de l'expression « $2 \times 2p^2$ », l'auteur ne fait pas d'allusion explicite au fait que « $2p^2$ » est un entier.

14 Par exemple, dans le cas où on manipule deux nombres pairs a et b, on pourra écrire a sous la forme $2k$ (avec k entier), et b sous la forme $2k'$ (avec k' entier).

- La fin du raisonnement n'est classiquement pas exprimé : le lecteur doit terminer seul la « preuve de (1) » en déduisant que l'on a prouvé l'implication n pair $\Rightarrow n^2$ pair (conclusion de l'introduction de l'implication : on a prouvé qu'en supposant temporairement n pair on prouve n^2 pair), puis que $\forall n \in \mathbb{N}$ (n pair $\Rightarrow n^2$ pair) (fin de l'introduction de la quantification universelle initiée par « Soit n »). Nous avons déjà vu que le lecteur doit faire le lien entre les propositions (1) et (2) et la proposition demandée. Le nombre d'omissions peut expliquer le fait que certains participants de l'atelier interprètent cette preuve comme une disjonction des cas.

La suite de l'atelier consiste justement à analyser une preuve considérée comme relevant d'une disjonction des cas. Cette analyse permet d'utiliser quelques règles de déduction déjà introduites, et d'en présenter de nouvelles. Nous nous appuyons sur le texte suivant :

> Soit x un nombre entier.
>
> Si x est pair : il existe un nombre entier k tel que $x = 2k$; les égalités $x^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ montrent que x^2 est pair.
>
> Si x est impair : il existe un nombre entier k tel que $x = 2k+1$; les égalités $x^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k)+1$ montrent que x^2 est impair.
>
> Dans tous les cas x^2 et x ont même parité.

Pour revenir sur la discussion à propos de la preuve précédente, soulignons les différences : une seule présentation de la variable x, deux situations à propos de cette variable étudiées séparément, conclusion « dans tous les cas ».

Comment modélise-t-on la disjonction des cas ? Il s'agit en fait d'une élimination du connecteur OU (noté aussi $\vee$). Si on a une preuve de R en supposant temporairement P, et également une preuve de R en supposant temporairement Q, alors on a une preuve de R à partir de $P \vee Q$.

Élimination du connecteur $\vee$ (disjonction des cas) :

$$\frac{P \vee Q \qquad \begin{bmatrix} P \\ \vdots \\ R \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Q \\ \vdots \\ R \end{bmatrix}}{R} \; \vee/$$

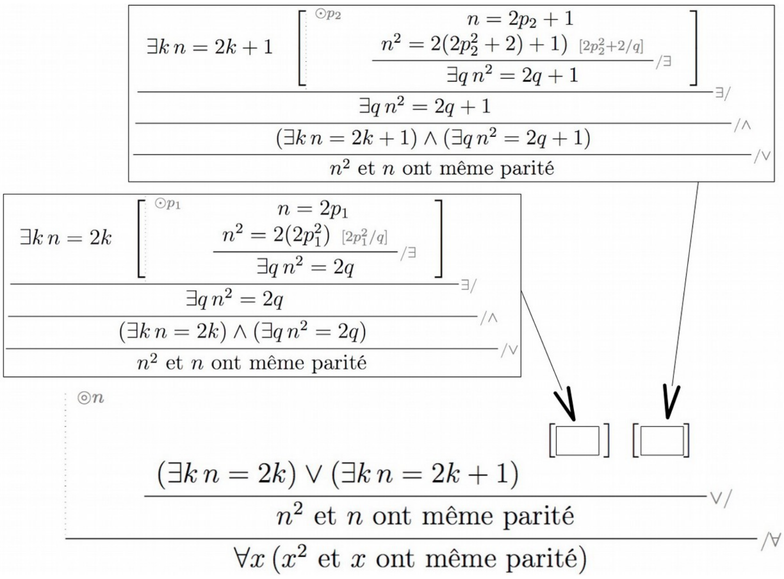
Soulignons que la disjonction $P \vee Q$ est rarement citée dans ce type de preuve (on pourrait préciser ici « un nombre est soit pair, soit impair » par exemple), on peut en avoir des traces avec les expressions « de deux choses l'une » ou, comme ici, « dans tous les cas ». La conclusion des preuves intermédiaires n'est pas citée ici (l'étude du cas « Si x est pair » ne se termine pas par « x^2 et x ont même parité »). La présentation des différents cas possible (des hypothèses temporaires P et R dans le référent ci-dessus) peut être faite de différentes façon : « si … si … » souligne la dimension hypothétique (mais ajoute une proximité avec l'idée d'implication, jamais éloignée dans les formulations de déduction, mais absente de l'élimination du connecteur $\vee$), on utilise aussi parfois « supposons », ou « soit … soit … » (ajoutant une confusion possible avec « Soit x » correspondant à la présentation d'une nouvelle variable, on se rapprocherait alors des formulations de la preuve précédente).

Un certain nombre d'autres éléments du référent ont déjà évoqués.

La preuve commence par la présentation d'une variable fraiche dans le but de prouver une proposition universellement quantifiée. On peut interpréter la dernière ligne comme la conclusion explicite de ce pas de déduction (« Dans tous les cas » peut être lu « Pour tout x »). Cette ligne peut aussi être lue comme la conclusion de la disjonction (« Dans tous les cas » lu comme « dans chacun des deux cas précédents, qui recouvrent bien tous les cas de nombres entiers possibles »). Les deux lectures ne sont pas exclusives l'une de l'autre.

Une fois que l'on se place dans le cas où x est pair, on retrouve des parties de la preuve page 9 étudiée précédemment : élimination d'une quantification existentielle (x est pair) en introduisant temporairement une variable fraiche (k), calcul algébrique, mise de x^2 sous la forme du double d'un nombre entier, et introduction d'une quantification existentielle (x^2 est pair). L'auteur marque la dernière inférence avec « Les égalités … montrent … ». Comme dans la preuve précédente, c'est la forme « $2(2k^2)$ » qui donne l'indice de la substitution permettant de conclure que x^2 est pair ($\exists y\ \ x^2 = 2y$). Le fait que $2k^2$ est entier n'est pas évoqué.

Le référent formel de cette preuve est le suivant :



Conclusions et perspectives

Nous avons montré dans cet atelier la façon dont nous utilisions un référent formel construit à partir de la déduction naturelle de Gentzen pour étudier les pratiques langagières des mathématiciens dans le cadre de la formulation de preuves. Cette démarche s'inscrit dans la continuité de l'utilisation du calcul des prédicats pour l'analyse des formulations des propositions, mais il y a une différence importante : le calcul des prédicats est familier aux mathématiciens (même si l'exercice de mettre au jour la structure logique d'une proposition est un exercice qui n'est ni habituel, ni toujours aisé), alors que le formalisme de la déduction naturelle est peu connu. Ceci nous a obligé à un détour technique d'appropriation et d'adaptation des règles et de leur formulation, et nous oblige, lors de la présentation de cet outil, à consacrer un temps important à l'outil lui-même, au détriment de la présentation de l'utilisation de cet outil. Nous avons ainsi essayé de combiner les deux en articulant la présentation des règles utilisées et l'analyse de preuves rédigées par des mathématiciens.

Dans un premier temps, pour analyser les preuves du corpus, nous avons utilisé des reformulations en langue naturelle, en essayant d'avoir un usage le plus formel possible de la langue. Nous nous sommes appuyés sur deux preuves utilisant un même argument mathématique. Ces premières analyses nous ont permis de confirmer un constat déjà relevé dans des travaux de didactique : la rédaction d'une preuve relève de choix personnels de l'auteur, celui-ci étant influencé par des pratiques classiques dans la communauté, tant dans les arguments choisis, la sélection des inférences mises en avant, que dans les formulations de ces arguments et de ces inférences. Les preuves réellement rédigées par des mathématiciens sont donc bien loin d'être des objets formels.

Ce constat nous amène à confirmer l'idée que l'apprentissage de la démonstration ne doit pas se réduire à l'apprentissage d'une rédaction formelle (idée déjà présente, notamment dans les travaux de Michèle Gandit, voir Gandit, 2008). Nous faisons par ailleurs l'hypothèse que des travaux d'analyse de formulations de preuves avec des enseignants pourraient les amener à prendre conscience de l'importance de ce travail sur les pratiques langagières. Le but n'est bien sûr pas qu'ils abandonnent telle ou telle façon de formuler les choses et rédigent leurs preuves comme celle de la page 5, mais qu'ils puissent avoir des outils réflexifs dans ce domaine, voire qu'ils puissent incorporer à leur enseignement l'explicitation de ces pratiques. Des expériences sont actuellement menées dans ce sens en formation. Nous menons aussi des expérimentations d'élaboration collectives de formulations de preuves en classe.

Dans un deuxième temps, nous avons présenté le référent formel que nous utilisons, qui, notamment pour faciliter la prise de distance avec le texte analysé, n'est volontairement pas en langue naturelle. Nous avons alors étudié deux autres preuves, dont nous avons analysé différemment la structure. La première preuve était rédigée comme celle d'une équivalence, vue comme conjonction de deux implications, la deuxième preuve était rédigée comme une preuve par disjonction des cas. Les deux référents formels associés à ces preuves sont bien distincts, beaucoup plus que ne le sont les preuves écrites. Il est d'ailleurs difficile de trouver un indicateur permettant de classer telle ou telle preuve dans telle catégorie. Nous nous appuyons sur certains indices : introduction(s) de la variable utilisée, quantification des conclusions intermédiaires (quand il y en a), etc. Comme on l'a vu, certaines preuves peuvent être interprétées comme relevant de tel ou tel structure. Le but n'était pas d'obtenir une classification, nous montrons là au contraire à quel point elle serait difficile, et donc à quel point les preuves rédigées ne sont pas des textes formels facilement identifiables comme relevant de tel ou tel type de raisonnement. Ce constat nous paraît intéressant à l'heure où un travail sur les types de raisonnement revient dans les programmes de mathématiques du lycée, et où l'on trouve dans les manuels des présentations des divers types de raisonnement.

Bibliographie

Barrier T. et Durand-Guerrier V. (2013) Modélisations logiques en situation de validation, in Bronner A. et al. (eds) *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, La Pensée Sauvage, Grenoble

Chellougui F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1 et Université de Tunis

Frege G. (1994), Que la science justifie le recours à une idéographie, traduit de l'allemand, dans Imbert C. *Gottlob Frege, écrits logiques et philosophiques*, pp63-69, Seuil, Paris (édition originale du texte : *Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift*, 1882)

Gandit M. (2008) *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement : une ingénierie en formation.* Thèse de doctorat. Université J. Fourier, Grenoble 1

Gandit M. (coord.) (à paraître) *Actes du 21e colloque de la CORFEM.*

Gentzen G. (1955) *Recherches sur la déduction logique*, traduit de l'allemand par Feys R. et Ladrière J., PUF, Paris (édition originale *Untersuchungen uber das logische Schließen*, 1934)

Gerbier Y. et Icart Seguy H. (1987), *Les marqueurs logico – discursifs car, comme, parce que, puisque*, Thèse de l'Université de Toulouse Le Mirail

Hache C. (2015), Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec », *Petit x* n°97, pp.27-43, IREM de Grenoble, Grenoble

Rakotovoavy F. (1983), *Difficultés linguistiques et pédagogiques soulevées par l'emploi, dans les textes mathématiques, de certains adjectifs marqueurs de variance (exemples principalement empruntés aux manuels du second degré)*, thèse de l'Université Paris 7, éditée par l'IREM de Paris 7, Paris